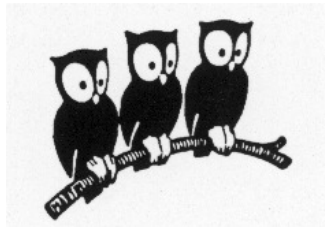


COLLECTIVE MODES OF SUPERFLUID FERMI GASES: FUNDAMENTAL ISSUES

Y. Castin

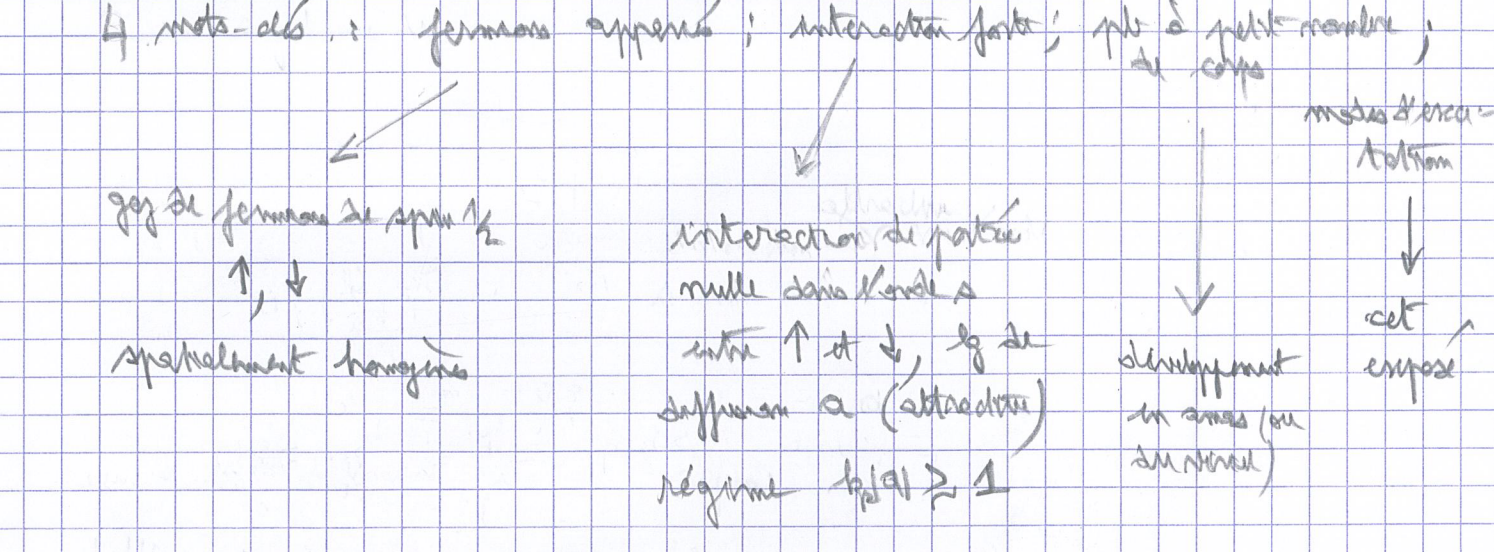
LKB, École normale supérieure, Paris (France)

Clickable references: [hal-3592961](#) ; *Annalen der Physik* 529, 1600352 (2017) ; *Comptes Rendus Physique* 21, 571 (2020) ; *Comptes Rendus Physique* 21, 253 (2020) ; *Comptes Rendus Physique* 21, 203 (2020).



Exposé à Gante: Modèle collectif de gaz de fermions neutres (2/6/2022)

1. deux travaux ayant trait avec la physique nucléaire



2. un mot sur le développement en amas

définition : $\frac{P \lambda^3}{k_B T} = \sum_{(m_\uparrow, m_\downarrow) \in \mathbb{N}^2} b_{m_\uparrow, m_\downarrow}^{\uparrow, \downarrow}$

$b_{m_\uparrow, m_\downarrow}^{\uparrow, \downarrow}$ se déduit de la solution aux pl à $k_\uparrow + k_\downarrow$ avec $0 \leq k_\sigma \leq k_F$
 propriétés

l'un avec le plus à petit nombre de corps : $b_{m_\uparrow, m_\downarrow}$ se déduit de la solution aux pl à $k_\uparrow + k_\downarrow$ avec $0 \leq k_\sigma \leq k_F$

méthode de résolution harmonique : $U_0 = \frac{1}{2} m_0 \omega^2 r^2$ puis $\omega \rightarrow 0$

résultats analytiques à la limite unitaire ($1/a = 0$, invariance d'échelle)

solution au pl à $E=0$ dans l'espace libre

$\Psi_0 = R^{\frac{d-3N-5}{2}} \phi(\vec{R})$
 hypercône hypercône
 spectre dans le régime harmonique
 $E - E_{cdm} = (2q + 1) \hbar \omega$ $q \in \mathbb{N}$

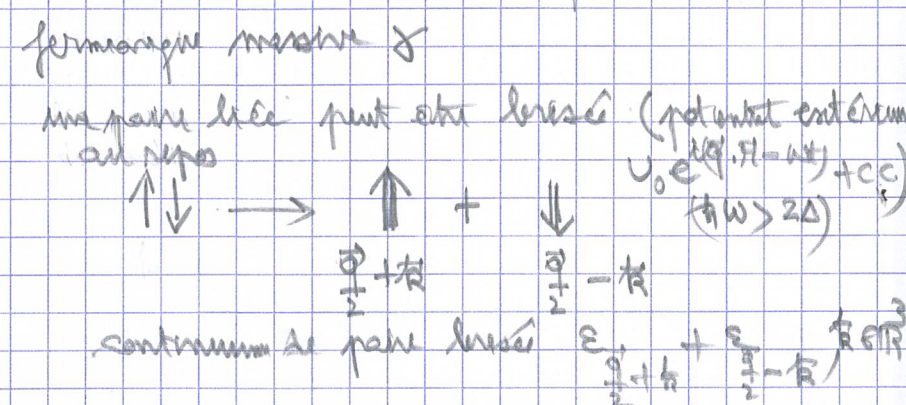
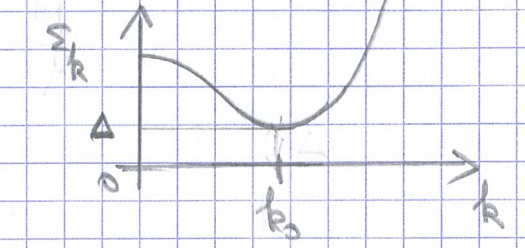
équation transcendante : $\Lambda(s) = 0$ avec l'opérateur d'échelle

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{2\pi i} \ln[\Lambda(is)] +$ correction de statistique
 quantique entre objets
 asymptotiques découplés
 $\uparrow \uparrow \rightarrow \textcircled{1} + \textcircled{1}$

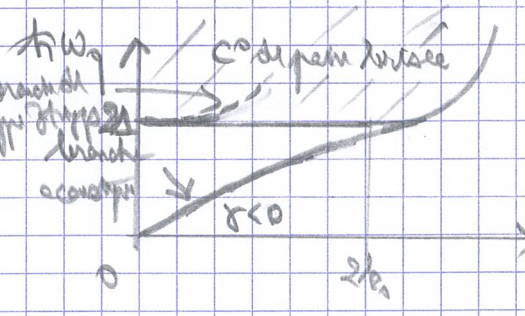
T3 Excitations de base d'un superfluide de fermions (rapide)

- cas $N_\uparrow = N_\downarrow$: à basse température, un condensat de paires liées (et $\mu > 0$ pour simplifier) ($k_B T \ll$ énergie de liaison d'une paire 2Δ)

- relation de dispersion d'un fermion non apparié ↑ (cas $N_\uparrow = N_\downarrow + 1$ par ex.) (théorie BCS) : parabolique près du minimum \Rightarrow quasi-particule fermionique massive γ



- excitation du centre de masse d'une paire liée : branche acoustique (phonon) (appel : non fermions sont neutres) Phonon BCS dépendent du temps



linéarisé autour de la solution stationnaire
 phonon = quasi-particule bosonique "relativiste" ϕ
 $\omega_q = c q [1 + \frac{1}{2} (\frac{\hbar q}{mc})^2 + \dots]$
 $q > 0$
 γ paramètre de structure sans dimension

N.B. dans le C⁰, une branche d'excitation collective de type Higgs (départ quadratique à 2Δ , énergie complexe car amortissement par émission de paires brisées)

- point clé : ces excitations interagissent entre elles ! c'est là que ça devient intéressant.

T4 Interaction ϕ - ϕ : obtention du son

Comment décrire l'interaction ϕ - ϕ pour un système en interaction forte : l'hydrodynamique quantique se déduit et s'identifie avec

opérateurs champs de densité de fluide $\hat{\rho}(\vec{r})$

(aménagement conjugué) $\text{Idé phase du superfluide } \phi(\vec{r}) \Rightarrow$ champ de vitesse $\vec{v}(\vec{r}) = \frac{\hbar}{m} \nabla \phi(\vec{r})$

$$H = \sum_{\vec{r}} (\Delta \vec{r})^3 \left[\frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 + e_0(\vec{r}) \right]$$

\downarrow énergie cinétique du mot d'ensemble
 \downarrow énergie interne du petit élément de fluide $(\Delta r)^3$ autour de \vec{r}

Il suffit de connaître l'équation d'état $\mu = e_0(\rho)$ à $T=0$.

Retrouver les phonons et leur interaction:

à basse T , développer en puissances des fluctuations autour des composantes du fluide à mot d'ensemble nul:

$$\hat{\rho}(\vec{r}) = \frac{1}{\Omega} \sum_{\vec{q}} \left(\frac{\hbar \rho_0}{2m} \right)^{1/2} (\hat{b}_{\vec{q}} + \hat{b}_{-\vec{q}}^\dagger) e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}}$$

$$\hat{\phi}(\vec{r}) = \frac{-\hbar}{\Omega} \sum_{\vec{q}} \left(\frac{mc}{2\hbar \rho_0} \right)^{1/2} (\hat{b}_{\vec{q}} - \hat{b}_{-\vec{q}}^\dagger) e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}}$$

d'où le développement de l'hamiltonien:

$$H = E_0 + H_2 + H_3 + H_4 + \dots$$

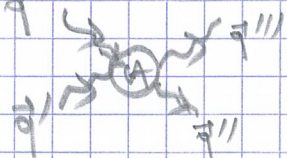
$$H_2 = \sum_{\vec{q}} \hbar c q \hat{b}_{\vec{q}}^\dagger \hat{b}_{\vec{q}}$$

\rightarrow ajoute à la même le terme de conjugué

$$H_3 = \dots + \dots + \dots + \dots$$

Application: amorbissement de ϕ dans le cas peu étudié $\gamma \ll \omega$

processus à 3 ϕ ne conservent pas l'énergie-impulsion
 processus à 4 ϕ : amplitude effective $|i = \vec{q}_1, \vec{q}_2 \rangle \rightarrow |f = \vec{q}_1', \vec{q}_2' \rangle$



$$A = \langle f | H_4 | i \rangle + \langle f | H_3 \frac{1}{E_i - H_2} H_3 | i \rangle$$

Règle d'or de Fermi (régime facilement collisionnel): $\Gamma_{\vec{q}}$

$$\Gamma_{\vec{q}} \underset{T \rightarrow 0}{\sim} \frac{\hbar c q}{\Omega} \left(\frac{1 + \frac{\partial \ln c}{\partial \ln \rho}}{2\pi} \right)^4 \left(\frac{\hbar T}{mc} \right)^7 \frac{mc^2}{\hbar |k|} \left(\frac{mc}{\hbar \rho_0^{1/3}} \right)^6 \bar{\Gamma}(\vec{q})$$

$$\bar{\Gamma}(\vec{q}) = \frac{4\pi}{3\hbar m_0} \int_0^{\hbar\omega} \Delta q' \int_0^{\hbar\omega - q'} \Delta q'' \dots \text{avec } \omega + \omega' = \omega + \omega'$$

Associer avec l'équation de Schrodinger pour $\bar{\Gamma}$, même sur les exposants:

$\bar{\Gamma}(\vec{q})$	$q \rightarrow 0$	L.K.	non
$\bar{\Gamma}(\vec{q})$	$q \rightarrow \infty$	q^4	q^2

TS Interaction ϕ - γ : mouvement collectif de γ dans le fluide

Comment décrire l'interaction ϕ - γ pour un système en interaction forte:

approximation d'homogénéité locale

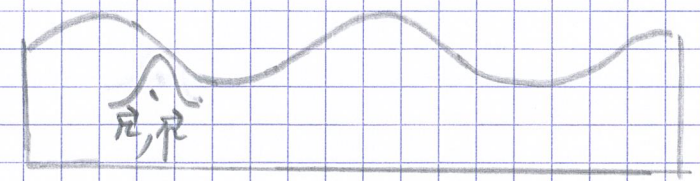
dans la limite $T \rightarrow 0$,

longueur d'onde thermique des phonons

longueur de cohérence de la quasi-particule massive

$$\frac{\hbar \rho_0}{\hbar k} \approx \frac{\hbar c}{\hbar \omega} \Rightarrow$$

$$\lambda_{\text{th}} = \frac{(2\pi)^{1/2} \hbar}{(m_{\text{eff}} \hbar \omega T)^{1/2}}$$



γ voit localement un superfluide homogène de densité $\rho(\vec{r})$ de vitesse $\vec{v}(\vec{r})$:

$$H_{\gamma} = \sum_{\vec{k} = \vec{p}/\hbar} \epsilon(\vec{k}) + \vec{p} \cdot \vec{v}(\vec{k})$$

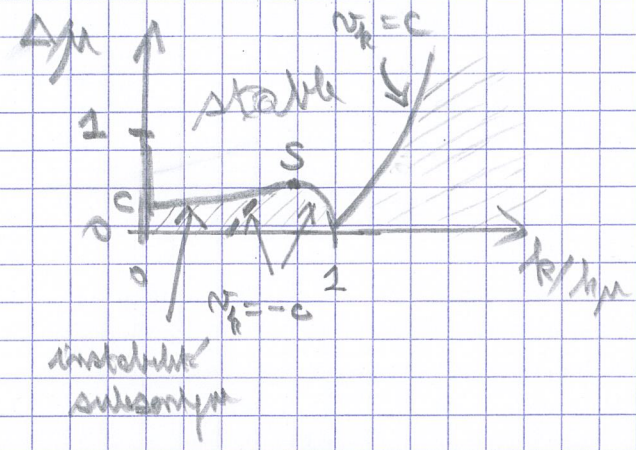
relation de dispersion dans le cas homogène $\epsilon_{\vec{k}}(\rho)$

effet Doppler

développement en puissances de $\hat{\phi}$:

$$H_{\gamma} = \sum_{\vec{k}} \epsilon_{\vec{k}} \hat{b}_{\vec{k}}^\dagger \hat{b}_{\vec{k}} + \dots + \dots + \dots + \dots$$

On suppose γ stable vis-à-vis de l'émission de photons
(ne peut réduire son énergie en émettant de ϕ)



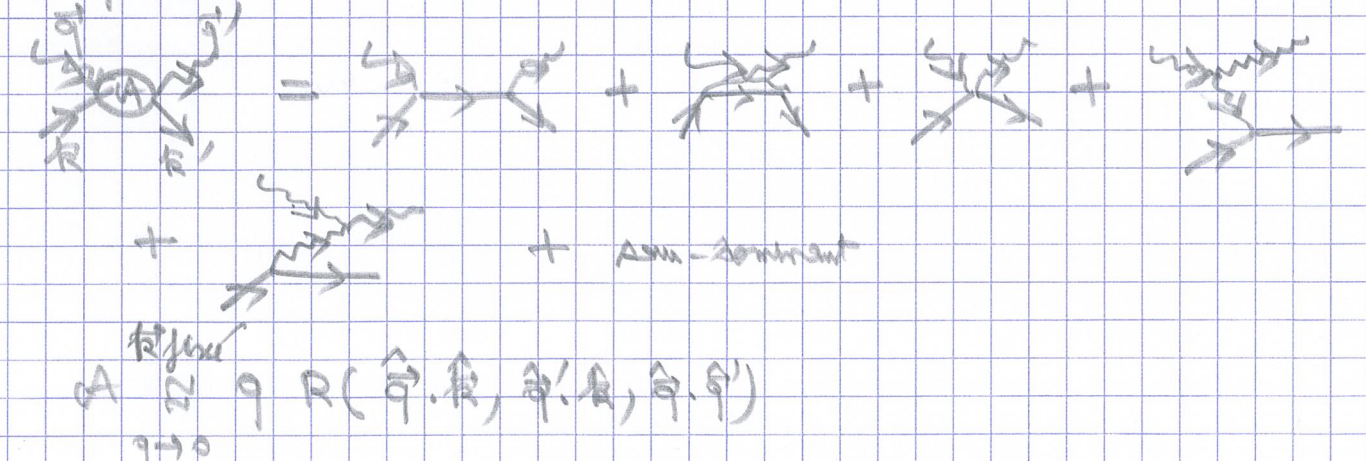
la théorie BCS prédit
une bande CS d'instabilité
subsonique

Desaccord avec Seerch, Bartsch, Kopitz (2008): dans un calcul à une
bande, pas de suppression du poids spectral par divergence IR logarith-
mique (des quasi-particules fermioniques existent bel et bien dans
le superfluide 3D)

$$\sum_k^{\text{bande}} = \frac{1}{1 + \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{|\langle \phi; q, r; k-q | V | r; k \rangle|^2}{[\epsilon_k - (\hbar\omega_q + \epsilon_{k-q})]^2} \rightarrow \sim q \rightarrow \sim q^2$$

6 Description de Fokker-Planck du mouvement de γ

A l'ordre dominant en T , γ subit de manière incessante des diffusions
en phonon:



Resultats antérieurs: $n_k = 0$ (L.K., Nichols-Penco) (1943) (2018)
en désaccord entre eux et avec nous!

cas $k_0 > 0$:

force moyenne $F(k) \hat{z}$ $F(k) \sim T^0 \mathcal{F}(k)$
 $T \rightarrow 0$

tensor de diffusion en impulsion
anisotrope: $D_{ij} = D_{\parallel} \hat{k}_i \hat{k}_j + D_{\perp} (\delta_{ij} - \hat{k}_i \hat{k}_j)$ $D_{\parallel, \perp} \sim T^0 \mathcal{D}_{\parallel, \perp}(k)$
 $T \rightarrow 0$

un paramètre: force moyenne non nulle \rightarrow vitesse nulle
(résistance de $k = k_0 \hat{z}$ $\neq 0$ lors d'un passage par $k=0$)
 $F(k_0) \sim T^0 [\mathcal{D}_{\parallel}(k_0) + \frac{2}{k_0} (\mathcal{D}_{\parallel}(k_0) - \mathcal{D}_{\perp}(k_0))]$

coefficient de diffusion spatiale

$$D_{\text{spa}} \sim \frac{1}{T^2} \left(\frac{1}{\mathcal{D}_{\parallel}(k_0)} + \frac{2}{\mathcal{D}_{\perp}(k_0)} \right)$$

T7 Deuxième note sur la bande de Higgs dans le continuum

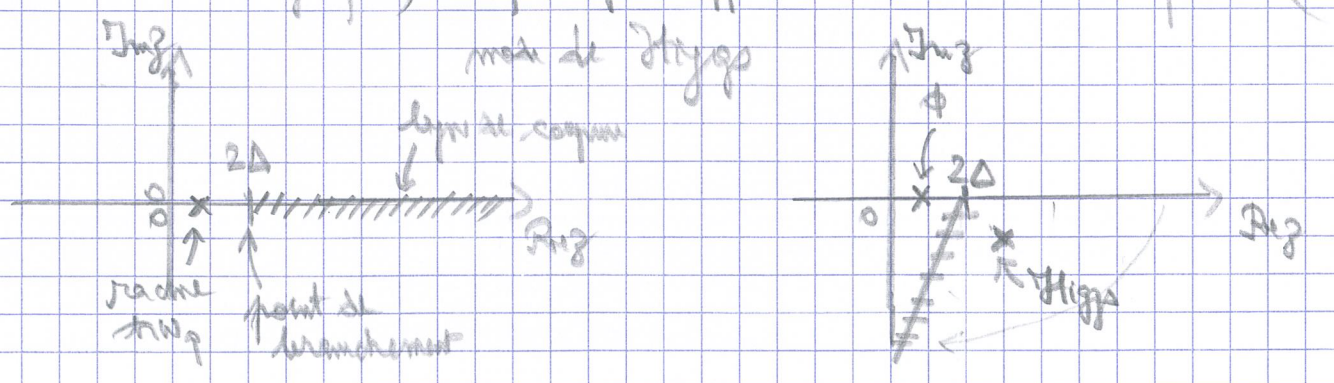
la théorie BCS dépendant du temps l'endosse donne l'équation sur
l'énergie propre z des modes de proton q :

$$\det M(z, q) = 0$$

matrice 2×2 (le paramètre k a des fluctuations en phase et en module)

• dans le plan complexe:
↳ une seule solution: $z = \hbar\omega_q$, réelle (mode de phonon)

↳ une ligne de coupure sur le continuum de phase brisée
en déplaçant cette ligne de coupure (par prolongement analytique) on peut faire apparaître une solution complexe ($\text{Im} z < 0$):



- limite de simple facile $\frac{\mu}{|\Delta|} \rightarrow +\infty$:
à faible q , départ quadratique en accord avec Andriamanontsoa (1976) mais en désaccord avec Luttinger et Vosko (1982) (Insgl. Luttinger)

- limite (dit CBS) de simple fort $\frac{\mu}{|\Delta|} \rightarrow -\infty$:
la bande interdite n'est plus Δ (parallèle à μ) mais
$$\Delta_g = (\Delta^2 + \mu^2)^{1/2} \gg |\Delta|$$

nous prédisons deux branches:

- hyperconduction sans bande interdite
$$\beta_g \sim \left(\frac{\mu}{|\Delta|}\right)^{4/5}$$

- bande de Higgs de départ parabolique
$$\beta_g = 2\Delta - \left(\frac{\mu}{|\Delta|}\right)^2 + \dots$$

↑ $\mu < 0$ $\downarrow > 0$
et non pas $2\Delta_g!$

pas vu par Gea, Castellani, Teitelbaum, Benfante (2015)
(ils le cherchaient mais ont omis de faire un prolongement analytique)

18 Conclusion

- ↳ la plupart de nos prédictions sur des problèmes fondamentaux, sont en contradiction avec les résultats antérieurs
- ↳ n'ont été observés dans aucun système (fermium froids, hélium liquide, ...)